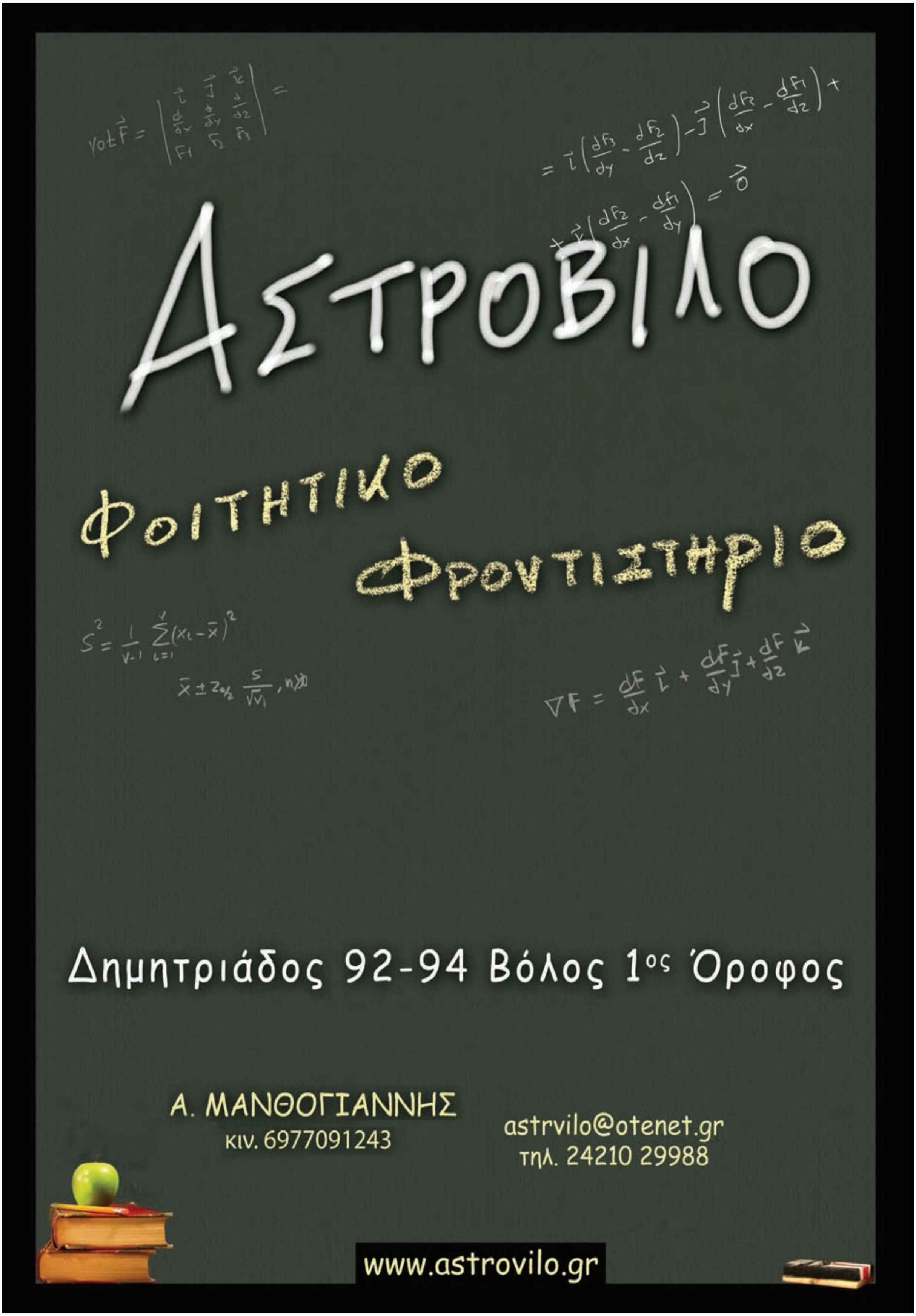
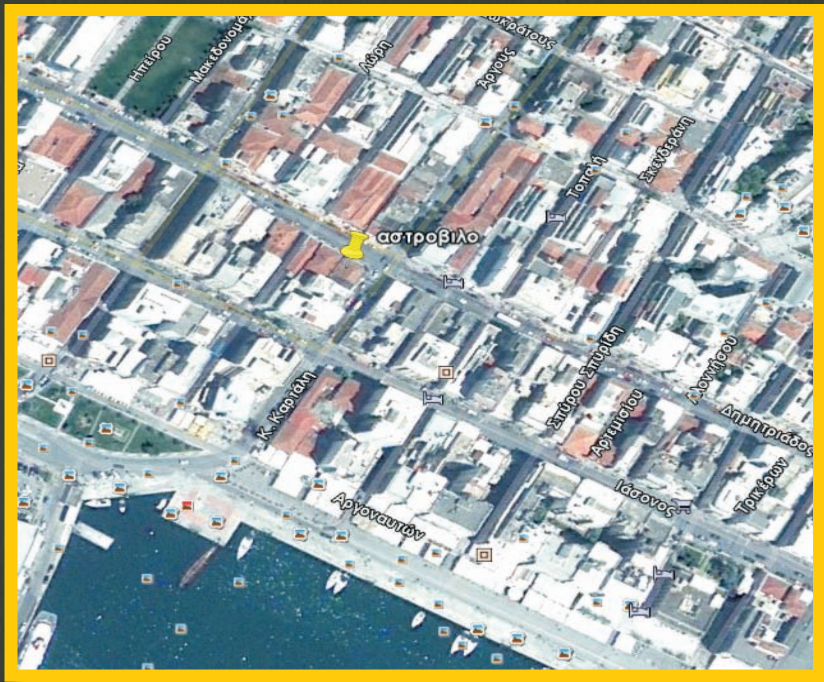

ΑΣΤΡΟΒΙΛΟ
ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
Δημητριάδος 92-94 Βόλος 1ος Όροφος
Α. ΜΑΝΘΟΓΙΑΝΝΗΣ
κιν. 6977091243
astrvilo@otenet.gr
τηλ. 24210 29988
www.astrovilo.gr



ΑΣΤΡΟΒΙΛΟ

Η λειτουργία του φροντιστηρίου

Ολιγομελή τμήματα (έως 6 άτομα) ή ιδιαίτερα. Τα τμήματα δημιουργούνται έτσι ώστε να αποτελούνται αποκλειστικά από φοιτητές του ιδίου τμήματος και της ιδίας σχολής.

Τα μαθήματα έχουν διάρκεια ένα εκπαιδευτικό 2ωρο με ένα 10λεπτο διάλειμμα

Σημειώσεις σε όλα τα μαθήματα

Προσωπική επαφή με τον φοιτητή

Συντονισμός διδασκαλίας και εξετάσεων

Η διδασκαλία προσαρμόζεται στην ύλη του μαθήματος και στο πνεύμα του κάθε πανεπιστημιακού καθηγητή. Λαμβάνονται επίσης υπόψη και οι ιδιαίτερες ανάγκες του κάθε φοιτητή.

Σύγχρονοι χώροι μάθησης

Η εμπειρία μας έχει δείξει ότι η έγκαιρη προετοιμασία κατά την διάρκεια του εξαμήνου είναι πιο αποδοτική από την εντατική προετοιμασία κατά την διάρκεια των εξετάσεων.

Δύναμή μας είναι η επιτυχία των φοιτητών μας

Ώρες Λειτουργίας Φροντιστηρίου 09.00- 13.00 και 16.00-22.00

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $A \subseteq R$ f: $A \to R$ ή $x \mapsto y$ ή $y = f(x),\ x \in R$

Γραφική παράσταση της συνάρτησης f $C_f = \{M(x,y) : y=f(x)\}$

- Συνάρτηση f **γνησίως αύξουσα** στο A τότε $f(x_1) < f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$.
- Συνάρτηση f **γνησίως φθίνουσα** στο A τότε $f(x_1) > f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$.
- ***Άνω φραγμένη συνάρτηση*** f:$A \to R$.Υπάρχει αριθμός s (άνω φράγμα της f) με την ιδιότητα: $f(x) \le s$, $\forall x \in A$. (Ανάλογα ορίζεται η κάτω φραγμένη).

Φραγμένη λέγεται η συνάρτηση αν είναι άνω και κάτω φραγμένη.

- 1 – 1 συνάρτηση f: $A \to R$: $\forall x_1, x_2 \in A$ αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$ ή ισοδύναμα: αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

Σύνθεση της f: $A \to R$ με την g:$B \to R$, $(gof)(x) = g(f(x)$, $\forall x \in A$ για τα οποία $f(x) \in B$.

Αντίστροφη συνάρτηση μιας 1-1 συνάρτησης f είναι η f^{-1}:$f(A) \to A$, που αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο $y \in f(A)$ στο μοναδικό x , για το οποίο ισχύει y=f(x), δηλ. $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

* *

Όρια και συνέχεια συναρτήσεων

Όριο συνάρτησης στο x_o – Πλευρικά όρια

$$\lim_{x \to x_0} \mathbf{f(x)} = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to x_o^+} f(x) = \lim_{x \to x_o^-} f(x) = \ell$$

Κριτήριο παρεμβολής

Αν $g(x) \le f(x) \le h(x)$ κοντά στο x_o και $\lim_{x \to x_0} h(\mathbf{x}) = \lim_{x \to x_o} g(x) = \ell, \text{τότε} \lim_{x \to x_o} f(x) = \ell$.

Η ιδιότητα αυτή ισχύει και στην περίπτωση που $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Συνέχεια

Η συνάρτηση f: $A \to R$ είναι συνεχής στο $x_o \in A$ αν $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$

* *

Παράγωγος συνάρτησης

Η συνάρτηση f: $A \to R$ είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο $x_o \in A$ αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o) \in R$.

Η **εφαπτομένη** ευθεία της C_f στο σημείο $(x_o , f(x_o))$ είναι $y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$.

- Αν f είναι παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ f συνεχής

Ιδιότητες παραγώγων

$(cf(x))' = cf'(x)$, $c \in R$

$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} ,g(x) \neq 0$$

Η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης f(g(x)) είναι

$$(f(g(x)))' = \frac{df(g(x))}{dx} = f'(g(x))g'(x) = \frac{df(g)}{dg} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

* *

Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων

f(x) = c , c∈R	f΄(x) = 0
$f(x) = x^k$, k∈R	$f΄(x) = kx^{x-1}$
f(x) = sinx	f΄(x) = cosx
f(x) = cosx	f΄(x) =-sinx
f(x) = tanx	$f΄(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = e^x$	$f΄(x) = e^x$
f(x) = lnx	$f΄(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin^{-1}x$ = arcsinx	$f΄(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \cos^{-1}x$ = arccosx	$f΄(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \tan^{-1} x$ = arctanx	$f΄(x) = \frac{1}{x^2+1}$
$f(x) = a^x$	$f(x) = a^x \ln(a)$

* *

Κανόνας l' Hospital

Πρώτη διατύπωση: Αν f(α) = g(α) = 0 και f΄(α) , g΄(α) υπάρχουν και g΄(α)≠0 , τότε:
$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

Δεύτερη διατύπωση: Αν $f(x_o) = g(x_o)=0$, με f(x) , g(x) διαφορίσιμες στο (α,b) , και g΄(x)≠0,εκτός πιθανώς του x_o∈(α,b), τότε $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Ο κανόνας ξαναχρησιμοποιείται αν ισχύουν οι ίδιες συνθήκες και για τις* παραγώγους των f(x) , g(x).

• Στις απροσδιόριστες $\frac{\pm\infty}{\mp\infty}$, $\infty-\infty$, $\infty\cdot 0$ γίνονται οι μετατροπές:

$\infty/\infty \rightarrow \frac{f}{g} = \frac{1/g}{1/f}$ $\quad 0\cdot(\pm\infty)\rightarrow fg = \frac{f}{1/g}$ $\quad \infty-\infty \rightarrow f-g = \frac{1/g-1/f}{1/fg}$

• Τις απροσδιόριστες 0^0 , $+\infty^0$, 1^∞ τις μετατρέπουμε με βάση τη σχέση $\lim_{x\to\alpha} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a}(g(x)\ln f(x))}$

$(f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)})$

Εφαρμογές των παραγώγων στο σχεδιασμό της C_f της f: A→R, με Δ διάστημα τέτοιο ώστε Δ⊆A.

Από πρώτη παράγωγο

Αν f΄(x) > 0, ∀x∈Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
Αν f΄(x) < 0, ∀x∈Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.
Αν $f΄(x_o) = 0$, για κάποιο x_o∈A και υπάρχει ε>0 τέτοιο ώστε f΄(x)>0 ∀x∈(x_o-ε , x_o) και f΄(x)<0 , ∀x∈(x_o , x_o+ε), τότε το x_o είναι σημείο τοπικού μεγίστου.(Ανάλογα για το ελάχιστο).

Από δεύτερη παράγωγο

Αν f΄΄(x) > 0, ∀x∈Δ, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο Δ.
Αν f΄΄(x) < 0, ∀x∈Δ, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο Δ.
Αν f΄΄(x) > 0 , ∀x<x_o και f΄΄(x)<0 , ∀x>x_o (ή αντίστροφα) , τότε το x_o είναι σημείο καμπής.

α) Αν $f'(x_o)=0$ και $f''(x_o)>0$, τότε το x_o είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.
β) Αν $f'(x_o)=0$ και $f''(x_o)<0$, τότε το x_o είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

Ασύμπτωτες

Κάθετη ασύμπτωτη η ευθεία $x=\alpha\in R$, $\lim_{x\to\alpha^-} f(x)=\pm\infty$ ή $\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=\pm\infty$

Οριζόντια ασύμπτωτη η ευθεία $y = b\in R$, αν $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ ή $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$

Πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $\pm\infty$ η ευθεία $y = \alpha x + b$, αν $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-\alpha x-b)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha\in R$ και $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-\alpha x)=b\in R$

* *

Σημαντικά Θεωρήματα λογισμού μιας μεταβλητής

Έστω η συνάρτηση $f:[\alpha,b]\to R$.
Bolzano: Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,b]$ και $f(\alpha)\cdot f(b)<0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(\alpha,b)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$.
Ενδιάμεσης τιμής: Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,b]$ και $f(\alpha)\neq f(b)$ τότε για κάθε αριθμό ρ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(b)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(\alpha,b)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=\rho$.
Μέγιστης-ελάχιστης τιμής: Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,b]$, τότε η f είναι φραγμένη στο $[\alpha,b]$. Επιπλέον υπάρχουν x_1 $x_2\in[\alpha,b]$ έτσι ώστε $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$, $\forall x\in[\alpha,b]$.
Θεώρημα μέσης τιμής (Θ.Μ.Τ.): Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,b]$ και παραγωγίσιμη στο (α,b) , τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,b)$ τέτοιο ώστε: $\frac{f(b)-f(\alpha)}{b-\alpha}=f'(\xi)$
Rolle: Αν η f συνεχής στο $[\alpha,b]$ παραγωγίσιμη στο (α,b), και $f(\alpha)=f(b)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$
Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,b) με $f'(x)=0$, $\forall x\in(\alpha,b)$, τότε $f(x)=c$, $\forall x\in(\alpha,b)$.
Cauchy. Αν οι $f(x)$, $g(x)$ είναι ορισμένες , συνεχείς στο $[\alpha,b]$, είναι διαφορίσιμες στο (α,b) και $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(\alpha,b)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $c\in(\alpha,b)$: $\frac{f(b)-f(\alpha)}{g(b)-g(\alpha)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$
Darboux. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,b]$ με $f'(\alpha)\ge f'(b)$.Αν $c\in R$ με $f'(b)<c<f'(\alpha)$, τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=c$.

Εφαρμογή του θεωρήματος για την προσέγγιση ρίζας: Έστω ότι η εξίσωση $x=f(x)$ έχει ρίζα α, με f να είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha-h , \alpha+h]$, να ισχύει $|f'(x)|<m<1$, $\forall x\in[\alpha-h , \alpha+h]$ και έστω αυθαίρετο $x_o\in[\alpha-h , \alpha+h]$. Τότε η ακολουθία $x_n=f(x_{n-1})$, n=1,2,…, συγκλίνει μονότονα στη ρίζα α.

* *

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Κάθε συνεχής f στο $[\alpha,b]$ είναι ολοκληρώσιμη

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

ΘΜΤ f συνεχής , τότε για κάποιο $\xi \in [\alpha,b]$ $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-\alpha)$

* *

Αόριστο ολοκλήρωμα ή αντιπαράγωγος

$f(x) + c = \int g(x)dx \Leftrightarrow (f(x) + c)' = g(x)$

Ιδιότητες

$\int(c_1f(x) + c_2h(x))dx = c_1\int f(x)dx + c_2\int h(x)dx$

$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

(παραγοντική ολοκλήρωση)

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$$

* *

Πίνακας βασικών αορίστων ολοκληρωμάτων

- $\int k dx = kx + c$
- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \in R - \{-1\}$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}dx = \tan^{-1}(\frac{x}{\alpha}) + c = \arctan(\frac{x}{\alpha}) + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}dx = \sin^{-1}(\frac{x}{\alpha}) + c = \arcsin(\frac{x}{\alpha}) + c$

* *

Θεμελιώδη Θεωρήματα Ολοκληρωτικού Λογισμού

I. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα [α,b] και F είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f, τότε

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(\alpha)$$

II. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα [α,b], τότε $\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

* *

Γενικευμένα Ολοκληρώματα

(α΄ είδους) $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_{\alpha}^{b} f(x)dx$ ή $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{b} f(x)dx$

(β΄είδους) $\int_{\alpha}^{b^-} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{\alpha}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ (b ιδιόμορφο σημείο)

$\int_{\alpha^+}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{\alpha+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ (α ιδιόμορφο σημείο)

(γ' είδους) = συνδυασμός α' , β' είδους

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\alpha\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx$ $\int_{a^+}^{b^-} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx + \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)dx$

με α<c<b (α,b ιδιόμορφα σημεία)

$\int_{-\infty}^{\alpha-} f(x)dx = \lim\limits_{b\to-\infty}\int_{b}^{c} f(x)dx + \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{c}^{\alpha-\varepsilon} f(x)dx$ (α ιδιόμορφο σημείο)

$\int_{a^+}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{\alpha+\varepsilon}^{c} f(x)dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx$ (α ιδιόμορφο σημείο)

(εσωτερικό ιδιόμορφο σημείο c∈[α,b] – πρωτεύουσα τιμή του Cauchy)

$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{\alpha}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ (c ιδιόμορφο σημείο)

* *

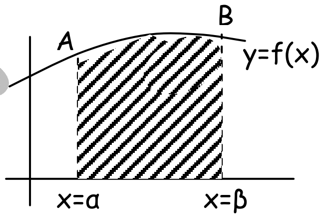
Ο **μετασχηματισμός Laplace** μίας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f: [0, +∞) →R είναι

L{f(t)}(x) = $\int_{0}^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$, για κάθε τιμή του x για την οποία το παραπάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

* *

Εφαρμογές Ολοκληρωμάτων

E = $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx, \quad f(x)\geq 0$



E = $\int_{a}^{b} |f(x)|dx, \quad f(x)\leq 0$

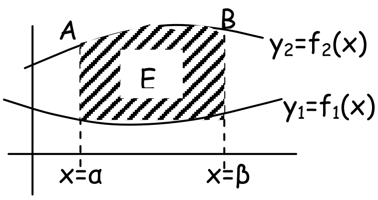
S = $\int_{\alpha}^{b}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ (μήκος επίπεδης καμπύλης)

$E_{ax}=2\pi\int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ (επιφάνεια από περιστροφή)

$V_{ax} = \pi\int_{a}^{b}[f(x)]^2 dx$ (όγκος από περιστροφή)

E = $\int_{a}^{b}[f_2(x)-f_1(x)]dx$

$V_{ax} = \pi\int_{a}^{b}\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]dx$



* *

Γ Ρ Α Μ Μ Ι Κ Η   Α Λ Γ Ε Β Ρ Α

Ο **ανάστροφος** πίνακας του $A=[a_{ij}]$ σημειώνεται με $A^T = [a_{ji}]$, (δηλαδή, οι γραμμές γίνονται στήλες και αντίστροφα).

Ιδιότητες: • $(A^T)^T=A$ • $(A+B)^T = A^T + B^T$ • $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, $\forall \lambda \in R$ • $(AB)^T = B^T A^T$

Ο **αντίστροφος** ενός nxn πίνακα $A = [a_{ij}]$ συμβολίζεται με A^{-1}και ισχύει $AA^{-1} = A^{-1}A=I_n$.

Ιδιότητες αντίστροφων πινάκων:

• $(A^{-1})^{-1} = A$ • $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ • $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ • $(A^k)^{-1} =(A^{-1})^k$, $\forall k \in Z$

Ανάπτυγμα Laplace της ορίζουσας τετραγωνικού πίνακα $A=[a_{ij}]$ ως προς την i γραμμή ή την j στήλη:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} A_{kj}$$

όπου $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ και M_{ij} η ελάσσων ορίζουσα του στοιχείου ij (ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει εάν αφαιρέσουμε την i γραμμή και την j στήλη από τον A)

Ιδιότητες ορίζουσας του nxn πίνακα A:

• $\det(A^{T)} = \det(A)$

• $\det (\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, $\forall \lambda \in R$

• $\det (AB) = \det(A)\det(B)$

• $\det (A^k) = [\det(A)]^k$, $\forall k \in R$

• A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ και $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} adjA$ όπου $adj(A) = [A_{ij}]^T=[(-1)^{i+j}M_{ij}]^T$.

Χώροι Υποχώροι

Ένα μη κενό υποσύνολο U του πραγματικού διανυσματικού χώρου V είναι υπόχωρος του δ.χ.V αν και μόνο αν $\forall \kappa,\lambda \in R$ και $\forall$ $u_1,u_2 \in U$ ισχύει $k u_1 + \lambda u_2 \in U$

• Τα διανύσματα v_1 , v_2 , ….. , v_k είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** όταν $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k = 0 \Rightarrow$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$

• Ένα σύνολο διανυσμάτων $\{v_1 , v_2 , \ldots , v_k\}$ του δ.χ. V είναι **μία βάση** του V αν και μόνο αν

I. ο δ.χ.V παράγεται από τα v_1 , v_2 , …..,v_k

II. τα v_1 , v_2 , …..,v_k είναι γραμμικά ανεξάρτητα και τότε η **διάσταση** του V είναι dimV=k.

•Έστω V ένας πεπερασμένης διάστασης δ.χ. και U,W υπόχωροι του V ,τότε ισχύει $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

•Για το ευθύ άθροισμα των υποχώρων $U,W,\subseteq V$, του πεπερασμένης διάστασης δ.χ. V ισχύει

$V = U \oplus W \Leftrightarrow$

$V = U + W$ και $U \cap W = \{0\} \Leftrightarrow$

$V = U + W$ και $\dim V = \dim U + \dim W$

Εσωτερικό γινόμενο

Για κάθε $x,y \in R^n$, **το εσωτερικό γινόμενο x·y** είναι ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύουν οι ιδιότητες

I. $(kx + \lambda y)\cdot z = k(x\cdot z) + \lambda (y\cdot z)$, $\forall x,y,z \in R^*$, $\forall$ $k,\lambda \in R$

II. $x\cdot y = y\cdot x$, $\forall x,y \in R^*$

III. $x\cdot x \geq 0$ και $x\cdot x=0 \Leftrightarrow x=0$

•το **μέτρο** του διανύσματος x ορίζεται από τον τύπο $||x||=\sqrt{x \bullet x}$

• Η **γωνία** $\omega \in [0,\pi]$ **δύο διανυσμάτων** μη μηδενικών ορίζεται από τον τύπο $\cos\omega = \dfrac{x\cdot y}{\|x\|\cdot\|y\|}$

Τα διανύσματα $x,y\in R^*$ είναι κάθετα αν και μόνο αν $x\cdot y=0$.
Για το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $x,y\in R^n$ ισχύουν οι ιδιότητες:
I. $x\cdot y=0 \Leftrightarrow ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$
II. $||x + y|| \le ||x|| + ||y||$
III. $||\lambda x|| \le |\lambda|\, ||x||,\ \forall\ \lambda\in R$
IV. $|x\cdot y| \le ||x||\cdot||y||$ (Cauchy – Schwarz)

- **Προβολή** p διανύσματος x στη διεύθυνση του y είναι $p=\frac{x\cdot y}{\|y\|^2}y$
- Το **ορθογώνιο συμπλήρωμα** ενός υπόχωρου $E\subseteq R^n$ είναι ο υπόχωρος $E^{\perp}=\{y\in R^n:\ x\cdot y=0,\ \forall x\in E\}$
  Επιπλέον, $E\oplus E^{\perp} = R^n$, $(E^{\perp})^{\perp}=E$.
- Μία βάση $u_1, u_2, \dots, u_k\in R^n$ ονομάζεται ορθοκανονική αν και μόνο αν τα διανύσματα είναι ανά δύο κάθετα και μοναδιαία (δηλ. $u_i\cdot u_j = 0$, $||u_i||=1$)
- Αν $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ είναι βάση του R^n, τα διανύσματα $\eta_1 = \xi_1$ και
  $\eta_j = \xi_j - \frac{\xi_j\cdot\eta_1}{\eta_1\cdot\eta_1}\eta_1 - \frac{\xi_j\cdot\eta_2}{\eta_2\cdot\eta_2}\eta_2 - \dots - \frac{\xi_j\cdot\eta_{j-1}}{\eta_{j-1}\cdot\eta_{j-1}}\eta_{j-1}$ για κάθε $j = 2,3,\dots,k$ είναι κάθετα μεταξύ τους, τα δε διανύσματα
  $u_1 = \frac{\eta_1}{\|\eta_1\|},\ u_2=\frac{\eta_2}{\|\eta_2\|},\ \dots,u_k=\frac{\eta_k}{\|\eta_k\|}$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του R^n.
- Ο πραγματικός τετραγωνικός πίνακας A με την ιδιότητα $AA^T = A^TA = I$ ονομάζεται **ορθογώνιος**.
  Στον ορθογώνιο πίνακα οι στήλες του (και οι γραμμές του) είναι ορθοκανονική βάση.

Για τους ορθογώνιους πίνακες ισχύουν επιπλέον οι ιδιότητες:
I. $|\det A| = 1$
II. $A^{-1} = A^T$
III. $||Ax|| = ||x||$
IV. Γινόμενο ορθογώνιων πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας

* *

Εξωτερικό γινόμενο

Εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων u,v είναι το διάνυσμα $u\times v=(|u|\cdot|v|\sin\theta)n$ όπου n το κάθετο μοναδιαίο στο επίπεδο των u,v.

Αν $u\times v=0$ τότε τα u,v είναι παράλληλα. Ισχύει $v\times u=\begin{vmatrix} i & j & k\\ v_1 & v_2 & v_3\\ u_1 & u_2 & u_3\end{vmatrix}$

$u\times v=-v\times u$, $(v+u)\times w=v\times w+u\times w$, $(v\times u)\times w=(v\cdot w)u-(u\cdot w)v$

Το $(w\times v)u=\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ u_1 & u_2 & u_3\end{vmatrix}$ λέγεται **μικτό** γινόμενο.

* *

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

Έστω U,V είναι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι. Μία απεικόνιση $f: U\to V$ ονομάζεται **γραμμική ή γραμμικός μετασχηματισμός**, όταν $f(kx + \lambda y) = kf(x) + \lambda f(y)$, $\forall x,y\in U$ και $\forall k,\lambda\in U$.
Το σύνολο $\ker f = \{x\in U: f(x)=0\}\subseteq U$ ονομάζεται **πυρήνας** της f και είναι υπόχωρος του U.
Το σύνολο $\mathrm{Im}f = \{y\in V: f(x)=y,\ x\in V\}\subseteq V$ λέγεται **εικόνα** της f και είναι υπόχωρος του V.
Για τη γραμμική απεικόνιση $f:U\to V$ ισχύει $\dim U = \dim\ker f + \dim \mathrm{Im}f$.
Η $f:U\to V$ λέγεται **ένα προς – ένα (1-1)** αν $\forall x,y\in U$ με $f(x) = f(y) \Rightarrow x=y$.
Η $f: U\to V$ λέγεται **επί** αν $\mathrm{Im}f = V$.

- Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:U\to V$ και τα διανύσματα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι βάση του U, τα δε $v_1, v_2, \dots, v_m$ είναι βάση του V. Από τις ισότητες

$f(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{m1}v_m$
$f(u_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{m2}v_m$
……………
……………
$f(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \ldots + a_{mn}v_m$

ορίζεται ο mxn πίνακας $A = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}$,

που ονομάζεται **πίνακας αναπαράστασης** της f ως προς τις βάσεις u_1, u_2 ,……, u_n και v_1 , v_2,….v_m.
Για τον πίνακα A ισχύει $f(x) = Ax$, για κάθε $x = [x_1 , x_2 \ldots x_n]^T \in U$.

• Αν για τους διανυσματικούς χώρους ισχύει dimU = dimV = n,τότε για τη γραμμική απεικόνιση $f:U\to V$. οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

I. f αντιστρέψιμη (υπάρχει η f^{-1})
II. f είναι 1-1
III. kerf={0}
IV. f είναι επί

* *

Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα πίνακα

Για έναν nxn πίνακα A οι **ιδιοτιμές** λ_i του πίνακα είναι οι ν ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda - \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \ldots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & \lambda - \alpha_{22} & \ldots & -\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \cdots & \lambda - \alpha_{nn} \end{bmatrix} = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_o$$

Αν ο A είναι τριγωνικός ή διαγώνιος, τότε οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του. Για κάθε ιδιοτιμή λ_i , i= 1,2,…n τα αντίστοιχα **ιδιοδιανύσματα** είναι οι μη μηδενικές λύσεις
$x = [x_1 , x_2 \ldots x_n]^T$ του ομογενούς συστήματος $(A - \lambda I)x = 0$, που είναι:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_i)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_i)x_2 \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda_i)x_n &= 0 \end{aligned}$$

• Για τις ιδιοτιμές του A ισχύουν:
$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_n = (-1)^n a_o$
και $trA = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = -a_{n-1}$, όπου a_0, a_{n-1} οι αντίστοιχοι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου p(λ). Αν λ_i ιδιοτιμή και x_i αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A, τότε λ_i^k , x_i είναι ιδιοποσά του A^k. Οι ιδιοτιμές συμμετρικού πίνακα είναι αριθμοί πραγματικοί, τα δε ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα.

• Ο πίνακας A **διαγωνοποιείται**, όταν $A= PDP^{-1}$, όπου D είναι διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A και P είναι ο πίνακας με στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

• Αν f(λ) είναι πολυώνυμο, τότε $f(A) = Pf(D)P^{-1} = Pdiag(f(\lambda_1) , f(\lambda_2) , \ldots , f(\lambda_n))P^{-1}$

• Κάθε συμμετρικός πίνακας διαγωνοποιείται και ιδιαίτερα υπάρχει ορθογώνιος πίνακας Q, ώστε $A= Qdiag(\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_n)Q^T$.

• Αν p(λ) είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός τετραγωνικού πίνακα A, τότε ισχύει $P(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_iA + a_oI = O$, από το θεώρημα των Cayley-Hamilton. Αν υ(λ) είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου f(λ) δια του p(λ) , τότε f(A) = υ(A) .

* *

Τετραγωνικές μορφές

Το πολυώνυμο των πραγματικών μεταβλητών x_1 , x_2 , ... , x_n της μορφής $F(x) = x^T A x$, όπου $x = [x_1\ x_2 \ldots x_n]^T$ και A είναι συμμετρικός πίνακας , ονομάζεται **τετραγωνική μορφή**. Αν $A=QDQ^T$, τότε η F(x) μετασχηματίζεται στη **διαγώνια μορφή** $F(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$, όπου $y=[y_1\ y_2 \ldots y_n]^T = Q^T x$. Αν λ_1 , λ_2,...., λ_n >0 (<0) η F λέγεται **θετικά (αρνητικά) ορισμένη** ,
αν λ_1 , λ_2,...., $\lambda_n \geq 0$ (≤ 0) λέγεται **θετικά (αρνητικά) ημιορισμένη**,
ενώ, σε κάθε άλλο συνδυασμό προσήμων των λ_i ονομάζεται **αόριστη** .

* *

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ – ΣΕΙΡΕΣ

•**Ακολουθία** είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών ακέραιων αριθμών.
Συμβολίζεται $\alpha_n = \alpha(n)$

Πρόοδοι

<u>Αριθμητική</u>: $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \omega$, $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\cdot \omega$

<u>Άθροισμα n όρων α.π.</u>: $S_n = \dfrac{n\cdot[2\alpha_1 + (n-1)\cdot\omega]}{2}$

<u>Γεωμετρική</u>: $\alpha_{n+1} = \lambda\alpha_n$ ή $\alpha_n = \lambda^{n-1}\cdot \alpha_1$

<u>Άθροισμα n όρων γ.π:</u> $S_n = \alpha_1 \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}, \lambda \neq 1$

<u>Γεωμετρικός μέσος</u>: Αν a,b,c είναι 3 διαδοχικοί όροι γ.π. τότε $b^2 = a\cdot c$

Σημαντικά όρια

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0, \lvert x\rvert < 1$
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \infty$	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x} = 1, x > 0$
$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x, \quad x \in R$

Φραγμένες ακολουθίες

άνω φραγμένη: $\alpha_n \leq M$, $n\in N$, για κάποιο $M\in R$
κάτω φραγμένη: $m \leq \alpha_n$, $n\in N$, για κάποιο $m\in R$
Φραγμένη: συγχρόνως άνω και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν $m \leq \alpha_n \leq M$, $n\in N$, για κάποια $m,M \in R$.
- Μία ακολουθία απολύτως φραγμένη είναι και φραγμένη και αντιστρόφως
- Μία φραγμένη ακολουθία δε συγκλίνει κατ' ανάγκη.

Μονότονες ακολουθίες

Μία ακολουθία α_n, $\forall n\in N$ ονομάζεται
Αύξουσα αν ισχύει $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$, $\forall n\in N$
Φθίνουσα αν ισχύει $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$, $\forall n\in N$
Μονότονη εάν είναι αύξουσα ή φθίνουσα
Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες – Σύγκλιση
Μία μονότονη ακολουθία δε συγκλίνει κατ' ανάγκη
Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία α_n είναι συγκλίνουσα στο R.
Κάθε συγκλίνουσα σε πραγματικό αριθμό ακολουθία είναι φραγμένη.
Αν $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ και $\lvert\alpha_n\rvert \leq \lvert\beta_n\rvert$ $\forall n\in N$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$

* *

Ειδικές Κατηγορίες Σειρών

α) **Γεωμετρικές Σειρές**: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$.

- αν $|r|<1$: συγκλίνει. Άθροισμα $\frac{1}{1-r}$,
- αν $r \geq 1$: απειρίζεται θετικά
- αν $r \leq -1$: κυμαίνεται , το όριο της δεν υπάρχει.

β) p – Σειρές: ς(p) = $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\rho}}$

- αν p >1: συγκλίνει
- αν p≤1: αποκλίνει

γ) Τηλεσκοπικές: $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$, $\alpha_n = b_n - b_{n+1}$. Συγκλίνει αν και μόνο αν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} b_{\alpha}$.

Άθροισμα: $b_o - \lim_{n\to\infty} b_n$

δ) Εναλλάσσουσες Σειρές: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$, $\alpha_n > 0$ ή $\alpha_n < 0$ για όλα τα n = 0,1,2,.....

ε) Σειρές Taylor: Αν η συνάρτηση f και οι πρώτες τις παράγωγοι $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ ..... , $f^{(n)}$ είναι συνεχείς στο [α,β] και αν η $f^{(n)}$ είναι διαφορίσιμη στο(α,b) τότε για ξ∈(α,x) ισχύει

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f^{(1)}(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + R_n(x)$$ όπου

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1}$ είναι το υπόλοιπο της πολυωνυμικής προσέγγισης n-βαθμού. Όταν α=0, τότε το ανάπτυγμα ονομάζεται ανάπτυγμα Maclaurin.

Συνήθη αναπτύγματα Taylor

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ...$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ..... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - .... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} ....$

στ) Σειρές Fourier:

Έστω μία f:[-L , L] →R, περιοδική με περίοδο T=2L, τότε η σειρά Fourier είναι:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L})$$ όπου

$$\alpha_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad \alpha_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, n = 1, 2, ...$$

Εάν f(x) άρτια τότε $b_n = 0$, ενώ εάν f(x) περιττή τότε $\alpha_o, \alpha_n = 0$.

* *

Κριτήρια σύγκλισης σειρών

I. Αν $\lim_{n\to\infty} \alpha_n \neq 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ δε συγκλίνει

II. α) Αν οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν, τότε για κάθε k,λ∈R

$\sum_{n=0}^{\infty} (ka_n + \lambda b_n) = k\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνει

β) Αν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ δε συγκλίνει, τότε $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ δε συγκλίνει.

III. Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ συγκλίνει. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

IV. (Απλό κριτήριο σύγκρισης). Έστω $0 \le a_n \le b_n$.

- αν $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}a_n$ συγκλίνει
- αν $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ δε συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}b_n$ δε συγκλίνει

V. (Γενικευμένο κριτήριο σύγκρισης). Έστω $0 \le a_n$, $0 < b_n$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{b_n} = c > 0$. Τότε οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ και $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ είτε συγκλίνουν είτε αποκλίνουν ταυτόχρονα.

VI. (Κριτήριο λόγου – d Alembert) Έστω $a_n \neq 0$ για $n \ge n_o$ και $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \lambda$. Τότε:

- αν λ<1 , τότε η $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ συγκλίνει
- αν λ>1 , τότε η $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ δε συγκλίνει
- αν λ=1 τότε δεν μπορούμε να απαντήσουμε.

VII. (Κριτήριο Ρίζας – Cauchy). Έστω $a_n > 0$ και $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha_n} = \lambda$

- αν λ<1 , τότε η $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ συγκλίνει
- αν λ>1 , τότε η $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ δε συγκλίνει
- αν λ=1 τότε δεν μπορούμε να απαντήσουμε

VIII.(Κριτήριο Leibnitz). Έστω $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha_n$. Αν η ακολουθία (a_n) είναι θετική , φθίνουσα και $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, τότε η σειρά συγκλίνει.

IX. Αν η ολοκληρώσιμη συνάρτηση f:[1,+∞)→R είναι θετική και φθίνουσα , τότε το I = $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ και η σειρά S = $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ συγχρόνως συγκλίνουν ή αποκλίνουν. Στην περίπτωση σύγκλισης ισχύει I < S < I + f(1).

* *

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Κλασικός ορισμός πιθανότητας: Αν ένα πείραμα έχει ν ισοδύναμα δυνατά αποτελέσματα, η πιθανότητα ενός ενδεχόμενου Α είναι ο λόγος ν(Α)/ν, όπου ν(Α) είναι ο αριθμός των ευνοϊκών αποτελεσμάτων του πειράματος για το Α.

Στατιστικός ορισμός πιθανότητας: Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α κάποιου πειράματος είναι ο αριθμός P(A) στον οποίο σταθεροποιείται η σχετική συχνότητα n(A)/n του Α σε ένα μεγάλο αριθμό n επαναλήψεων του πειράματος με παρόμοιες συνθήκες.

Συνδυασμοί: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Διατάξεις: $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

Διατάξεις με επανάθεση: $R_{v,r} = v^r$

Μεταθέσει ν αντικειμένων: $P_{v,v} = v!$

Χρήσιμοι τύποι: $(A^c)^c = A$, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα: $A \cap B = \varnothing$

$P(A^c) = 1 - P(A)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

<u>Δεσμευμένη Πιθανότητα</u> $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

<u>Ανεξάρτητα ενδεχόμενα:</u> $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

<u>Ολική Πιθανότητα:</u> αν $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ και $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j = 1, \ldots, n$, τότε

$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)$.

Τύπος Bayes:

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + \ldots + P(A_n)P(B \mid A_n)}, \quad \text{όπου } \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \text{ και}$$

$A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j = 1, \ldots, n$.

Μέση τιμή διακριτής: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$

Μέση τιμή συνεχούς: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

Διασπορά: $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Τυπική απόκλιση: $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

* *

Βασικές κατανομές πιθανότητας

Διωνυμική κατανομή: B(n,p):

$f(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, 1, \ldots, n$ **E(X)** = np , **Var(X)** = np(1-p)

Poison P(λ): $f(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, k = 0,1,… **E(X)** = λ , **Var(X)** = λ

Αρνητική διωνυμική: $f(k) = \binom{k-1}{v-1} p^v (1-p)^{k-v}$, k=v , v+1,….

E(X) = v/p, **Var(X)** = v(1-p)/p²

Γεωμετρική κατανομή G(p) είναι η αρνητική διωνυμική για v=1.

Υπεργεωμετρική κατανομή: $f(k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ k=0,….,n , $N_1 + N_2 = N$

E(X) = $\frac{n \cdot N_1}{N}$, $Var(X) = \frac{nN_1 \cdot N_2 \cdot (N-n)}{N^2 \cdot (N-1)}$

Ομοιόμορφη κατανομή: U(α,b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-\alpha}, & \alpha \leq x \leq b \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$ **E(X)** = (α+b)/2 , **Var(X)** = (b-α)²/12

Κανονική κατανομή: $N(\mu,\sigma^2)$:

$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty$ $\quad E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$

Τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$: προκύπτει από την κανονική κατανομή με

$z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$, για z<0 ισχύει $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

Εκθετική : $f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$ $\quad E(X) = 1/\alpha$, $Var(X) = 1/\alpha^2$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες με $E(X_i) = \mu$. $Var(X_i) = \sigma^2$, τότε $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$ ή

$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2), n \geq 30$.

* *

Χρήσιμες ταυτότητες και σχέσεις:

$(\alpha + b)^n = \alpha^n + \binom{n}{1}\alpha^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{r}\alpha^{n-r}b^r + \ldots + b^n$

$(\alpha \pm b)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha b + b^2$

$(\alpha \pm b)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2 b + 3\alpha b^2 \pm b^3$

$\alpha^2 - b^2 = (\alpha + b)(\alpha - b)$

$\alpha^3 \pm b^3 = (\alpha \pm b)(\alpha^2 \mp \alpha b + b^2)$

$\alpha^n - b^n = (\alpha - b)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}b + \alpha^{n-3}b^2 + \ldots + \alpha^2 b^{n-3} + \alpha b^{n-2} + b^{n-1})$, n=1,2,3,...

$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$, α>0 , n = 1,2,3...

* *

Βασικοί τριγωνομετρικοί τύποι, $x \in R$

$\sin(x) = -\sin(-x)$, $\quad \cos(x) = \cos(-x)$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\quad \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$,

$\sin x \pm \sin y = 2\sin\dfrac{x \pm y}{2}\cos\dfrac{x \mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x + y}{2}\cos\dfrac{x - y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x + y}{2}\sin\dfrac{x - y}{2}$

$\sin(0) = \cos(\pi/2) = 0$,

$\cos(0) = \sin(\pi/2) = 1$

$\sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$

$\sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$

$\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$

$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

* *

Σύνολο μιγαδικών $C = \{z = x + iy \mid x, y \in R\}$

Συζυγής: $\overline{z} = x - iy$

Αντίστροφος: $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Μέτρο μιγαδικού αριθμού: $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ και $r^2 = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, όπου θ το όρισμα, r το μέτρο.

Θεώρημα De Moivre: $z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$, n ακέραιος

Οι n διακεκριμένες ρίζες της εξίσωσης $x^n = z$, $z \neq 0$, $n \in N$, (που λέγονται και n-οστές ρίζες του z), δίνονται από τον τύπο $z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}), k = 0,1,....,n-1$

Σχέση καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων:

$x = r \cdot \cos\theta$, $y = r \cdot \sin\theta$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

* *

Διαφορικοί τελεστές

- Έστω διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : A \subseteq IR^3 \to IR^3$ με τύπο $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

  Ονομάζουμε **απόκλιση** του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$

και συμβολίζουμε $div\vec{F}$ την αριθμητική συνάρτηση $A \subseteq IR^3 \to IR$

με τύπο $div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

- Έστω βαθμωτό πεδίο $f : A \subseteq IR^3 \to IR$

Ονομάζουμε **κλίση** του βαθμωτού πεδίου f και συμβολίζουμε ∇f ή **gradf** τη διανυσματική συνάρτηση

∇f ή $gradf = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$

- Έστω διανυσματικό πεδίο $\vec{F} : A \subseteq IR^3 \to IR^3$ με τύπο $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

Ονομάζουμε **περιστροφή** ή **στροβιλισμό** του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$

και συμβολίζουμε $rot\vec{F}$ ή $curl\,\vec{F}$ τη <u>διανυσματική συνάρτηση</u> $A \subseteq IR^3 \to IR^3$ με τύπο

$$rot\vec{F} \text{ ή } curl\,\vec{F} \text{ ή } \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

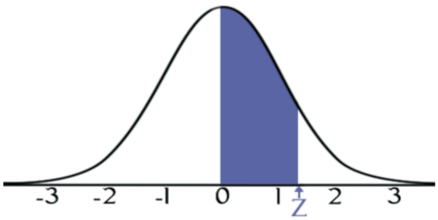
Αν ισχύει $rot\vec{F} = 0$ το πεδίο λέγεται **ΑΣΤΡΟΒΙΛΟ**

t Table

cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$	$t_{.9995}$
one-tail	0.50	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
two-tails	1.00	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.000	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.000	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.000	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.000	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.000	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.000	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.000	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.000	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.000	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.000	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.000	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.000	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	0.000	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
100	0.000	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
1000	0.000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098	3.300
z	0.000	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291
	0%	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.8%	99.9%
	Confidence Level										

Chi Square Distribution Table

d.f.	$\chi^2_{.25}$	$\chi^2_{.10}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.010}$	$\chi^2_{.005}$	$\chi^2_{.001}$
1	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8
3	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3
4	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5
6	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9
10	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9
13	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1
15	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7
16	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3
19	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	32.8
20	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8
22	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	28.2	33.2	36.4	39.4	32.0	45.6	51.2
25	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1
27	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9
29	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3
30	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7
40	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4
50	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7
60	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	99.6
70	77.6	85.5	90.5	95.0	100	104	112
80	88.1	96.6	102	107	112	116	125
90	98.6	108	113	118	124	128	137
100	109	118	124	130	136	140	149



Standard Normal Table (Z)

Entries in the table give the area under the curve between the mean and *z* standard deviations above the mean. For example, for *z* = 1.25 the area under the curve between the mean (0) and *z* is 0.3944.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0190	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2969	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3513	0.3554	0.3577	0.3529	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998

ΑΣΤΡΟΒΙΛΟ

ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ

ΔΙΚΤΥΑ
Γραμμική Άλγεβρα
Λογισμός 1
Πιθανότητες C
Προγραμματισμός 3
Σήματα-συστήματα

ΠΟΛΙΤΙΚΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ
Μαθηματικά 1
Στατική 2
Σκυρόδεμα 2
Τεχνική Μηχανική

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ
Στατιστική 2
Οικονομετρία 2
Μαθηματικά 1

ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΟΙ
Μαθηματικά 1
Δυναμική

ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΕΣ
Στατική 1

ΧΩΡΟΤΑΚΤΕΣ
Μαθηματικά
Στατιστική

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ
μαθηματικά 1

ΚΑΤΑΤΑΚΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Παιδαγωγικό Δημοτικής
Μηχανολόγοι

Κατόπιν συνεννόησης είναι δυνατόννα εξυπηρετήσουμε διδικτικές ανάγκες φοιτητών Τ.Ε.Ι. ή άλλων σχολών, εκτός του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Δημητριάδος 92-94 Βόλος 1ος Όροφος

Α. ΜΑΝΘΟΓΙΑΝΝΗΣ
κιν. 6977091243

astrvilo@otenet.gr
τηλ. 24210 29988

www.astrovilo.gr